Análisis Numérico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Tarea I

Daniel Castañón Quiroz*[1]

[1]Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

February 22, 2024

1 Problemas Teóricos

1. Utilizar el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial para demostrar que los siguientes problemas tienen solución única. Adicionalmente, para cada uno de los problemas encuentra su solución única:

   (a) $y' = y\cos(t),\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1.$

   (b) $y' = \dfrac{2}{t}y + t^2e^t,\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 0.$

   (c) $y' = \dfrac{4t^3y}{1+t^4},\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1.$

2. Demostrar que el método del punto medio definido como:

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= y_0 \\ \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + \Delta t\left(f\left(t_i + \frac{h}{2}, \hat{y}_i + \frac{h}{2}f(t_i,\hat{y}_i)\right)\right) \quad \text{para } i \in \{0,\ldots,N\}, \end{aligned}$$

   que se emplea para aproximar la ecuación diferencial ordinaria escalar:

$$\begin{aligned} y' &= f(t,y) \quad t \in (a,b) \\ y(a) &= y_0. \end{aligned}$$

   tiene un error de truncamiento de orden $r = 2$. (**Sugerencia**: utilizar el hecho de que f satisface la condición de Lipschitz en la variable y, el teorema de Taylor varias veces, y la desigualdad $x \le |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$).

3. Utiliza el teorema de Taylor con residuo para obtener la siguiente approximación de tercer orden para una función suficientemente derivable $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$y(x+3h) = 3y(x+2h) - 3y(x+h) + y(x) + Ch^3,$$

   donde C es una constante.

4. Demostrar que el conjunto $D := \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 |\, a \le t \le b, -\infty < y < \infty\}$ es un conjunto convexo.

*daniel.castanon@iimas.unam.mx

5. Sea la ecuación diferencial ordinaria escalar:

$$y' = f(t, y) \quad t \in (a, b), \tag{1}$$
$$y(a) = y_0. \tag{2}$$

Supongasé lo siguiente:

(a) La función $f(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y con constante Lipschitz L_1.

(b) $f'(t, y)$ satisface la condición de Lipschitz en la variable y con constante Lipschitz L_2, donde $f'(t, y) := \frac{d}{dt}[f(t, y)]$.

(c) $|\frac{d^3y}{dt^3}(t)| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$.

Sea $\hat{y}_i$ la aproximación de la solución $y(t_i)$ utilizando el método de Taylor (explícito) de orden $m = 2$. Entonces demostrar que

$$|y(t_i) - \hat{y}_i| \leq C\Delta t^2 \qquad \text{para } i \in \{0, .., N\}, \tag{3}$$

donde C es una constante, N es el número de sub-intervalos que divide a $[a, b]$, y $\Delta t = (b - a)/N$. Supóngase adicionalmente que $\Delta t < 1$.