Introducción a la Práctica de los Elementos Finitos
Tarea I

Daniel Castañón Quiroz*[1]

[1]Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

September 6, 2023

1 Problemas Teóricos

1. Utilizando integración por partes, calcular las siguientes integrales definidas e indefinidas:
   (a) $\int x^2 \sin x dx$
   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$
   (c) $\int_0^1 e^x \sin x dx$
   (d) $\int \sec^3 x dx$

2. Utilizando la regla de la cadena, calcular las siguientes derivadas:
   (a) Sea $u(x, y) = y^2 + x^2$ donde $y := f(x)$ y $f(x) = f'(x)$. Entonces calcular $\frac{du}{dx}$.
   (b) Sea $z(x, y) = \sin^2(y) + 3x^2$ donde $y := f(x, t)$ y $x := g(t)$. Entonces calcular $\frac{dz}{dt}$ y $\frac{d^2z}{dt^2}$.
   (c) Sea $u(x, y, t) = y \cdot \cos(t + x)$ donde $y := f(x, t)$ y $x := g(t)$. Entonces calcular $\frac{du}{dt}$ y $\frac{d^2u}{dt^2}$.

3. Demostrar o dar un contraejemplo de que el espacio V definido por $V := \{v \in C^1[0, 1] : v, v' \in L^2(0, 1)\}$ es un espacio vectorial. Asimismo realizar lo siguiente:
   (a) Si definimos la norma de V como $\|v\| := \int_0^1 |v'|^3 dx$, demuestra o da un contraejemplo que V es normado.
   (b) Si definimos la norma de V como $\|v\| := \int_0^1 |v'| dx + |v(0)|$, demuestra o da un contraejemplo que V es normado.

4. Dado el siguiente problema en formulación fuerte: Dado $f \in L^2(0, 1)$ y dados $\kappa \in L^2(0, 1)$, $\kappa > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Encontrar $u(x)$ tal que:

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du}{dx}\right) + b\frac{du}{dx} = f(x) \qquad \text{en } (0, 1) \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

*daniel.castanon@iimas.unam.mx

Obtener la formulación débil del problema fuerte mencionado. Esto es, se debe encontrar el espacio V que solo requiera que la función y su primera derivada sea integrable, y la forma bilineal $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ para entonces obtener la formulación: Encontrar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = (f, v). \tag{3}$$

Demostrar que V es un espacio vectorial. ¿Es la forma bilineal a simétrica?

5. Sea $D := (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Demostrar directamente la siguiente desigualdad de Sobolev: Para todo $v \in C^1(\overline{D})$ tales que $v(0) = v(1) = 0$, entonces

   $$\|v\|_{L^\infty(D)} \leq C\|v'\|_{L^2(D)},$$

   donde C es una constante. (Sugerencia: Usar el teorema fundamental del cálculo).

6. Sea $D := (0, 1)$ y $v : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función suave tal $v(0) = 0$. Asimismo sea su interpolador $v_I(x)$ utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden**. Entonces demostrar que

   $$\|v - v_I\|_{L^2(D)} \leq Ch^2\|v''\|_{L^2(D)},$$

   donde C es una constante y $h = \max_i\{h_i\}$. (Sugerencia: Usar un razonamiento similar al que se usó en clase para demostrar que $\|v - v_I\|_E \leq Ch\|v''\|_E$).