Introducción a los Elementos Finitos
Tarea III

Daniel Castañón Quiroz*[1]

[1]Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

October 23, 2023

1 Instrucciones

Todo los problemas se deberán entregar en archivos diferentes con extensión `.m`. Por ejemplo el problema 1 deberá estar estar en el archivo `Problema_1.m`, etc. Dentro de cada archivo se deberá poner el nombre del estudiante y su correo eléctronico.

2 Problemas de resolución numérica de sistemas no-lineales en Matlab

1.- (1.0 punto) Utilizar el método de Newton con criterio de tolerancia de paro de $\epsilon = 10^{-9}$ de la diferencia absoluta entre aproximaciones sucesivas, y un máximo de iteraciones $N = 30$ para aproximar la raíz positiva de de la ecuación $g(x) = 0$, donde $g(x) := x^2 - 5$. Escoger como aproximación inicial $x_0 = 1$. Al final del algoritmo el programa deberá imprimir la solución aproximada $\hat{x}$ y el valor $g(\hat{x})$.

2.- (1.5 puntos) Utilizar el método de Newton con criterio de tolerancia de paro de $\epsilon = 10^{-9}$ de la diferencia en la norma euclideana entre aproximaciones sucesivas, y un máximo de iteraciones $N = 30$ para aproximar la solución al sistema no-lineal $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) = [g_1(\mathbf{x})\ g_2(\mathbf{x})\ g_3(\mathbf{x})]^t$ y

$$g_1(\mathbf{x}) = 3x_1 - \cos(x_1x_2) - \frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06, \tag{2}$$

$$g_2(\mathbf{x}) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3}. \tag{3}$$

Escoger como aproximación inicial $\mathbf{x}_0 = [0.1\ 0.1\ \ -0.1]^t$. Al final del algoritmo el programa deberá imprimir la solución aproximada $\hat{\mathbf{x}}$ y la norma euclideana de $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}})$.

3 Problemas de elementos finitos en Matlab

3.1 Instrucciones

Todos los programas deberán correr y tener solamente el output que se específica utilizando el comando `disp`. Para todo los problemas, el único output del programa deber ser una tabla de la forma:

```
[N_vec' L2_err_norm' L2_err_rate' H1_err_norm' H1_err_rate']
```

*daniel.castanon@iimas.unam.mx

donde `N_vec` es el vector que contiene en cada entrada el número de subintervalos que divide al intervalo global para cada problema, `L2_err_norm` el vector que contiene en cada entrada el error en la norma L^2, `L2_err_rate` el vector que contiene en cada entrada la tasa de convergencia de la norma L^2, y así similarmente para los vectores `H1_err_norm` y `H1_err_rate`. Tomar como referencia el script de matlab número 10 que esta en el website del curso.

3.- (2.5 puntos) Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), \tag{4a}$$

$$u(0) = 0,\, u(1) = 0, \tag{4b}$$

donde

$$f(x) = -12\pi\cos(4\pi x)x^2 + (16(x^3+1))\pi^2\sin(4\pi x),$$

y $k(x) = 1 + x^3$. Verificar que $u(x) = \sin(4\pi x)$ es la solución del problema (4). Y obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.

4.- (2.5 puntos) Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), \tag{5a}$$

$$u(0) = 0,\, u(1) = 0, \tag{5b}$$

donde $f(x) = \sin(4\pi x)((4\pi)^2 + 1)$. Verificar que $u(x) = \sin(4\pi x)$ es la solución del problema (5). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(D)$ y $H^1(D)$ para $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$ donde N es el número de subintervalos que dividen a D.

5.- (2.5 puntos) Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), \tag{6a}$$

$$u(0) = 0, \frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = 0, \tag{6b}$$

donde $f(x) = -2e^x + 2(1-x)e^x + (1-x)^2e^x - 1$. Verificar que $u(x) = (1-x)^2e^x - 1$ es la solución del problema (6). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(D)$ y $H^1(D)$ para $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$ donde N es el número de subintervalos que dividen a D.

6.- (**2.5 puntos extras**) Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden y el método de Newton** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u^2 = f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), \tag{7a}$$

$$u(0) = 0,\, u(1) = 0, \tag{7b}$$

donde $f(x) = 4\pi^2\sin(2\pi x) + \sin^2(2\pi x)$. Verificar que $u(x) = \sin(2\pi x)$ es la solución del problema (7). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(D)$ y $H^1(D)$ para $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$ donde N es el número de subintervalos que dividen a D.