Teoría, Práctica y Aplicaciones de los Elementos Finitos
Tarea I

Daniel Castañón Quiroz*[1]

[1]Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

February 27, 2023

1 Problemas en Matlab

1.1 Instrucciones

Todo los problemas se deberán entregar en archivos diferentes con extensión `.m`. Por ejemplo el problema 1 deberá estar estar en el archivo `Problema_1.m`, etc. Dentro de cada archivo se deberá poner el nombre del estudiante y su correo eléctronico. Utiliza commentarios cuando sea necesario. Todos los programas deberán correr y tener solamente el output que se específica utilizando el comando `disp`. Para todo los problemas, el único output del programa deber ser una tabla de la forma:

```
[N_vec' L2_err_norm' L2_err_rate' H1_err_norm' H1_err_rate']
```

donde `N_vec` es el vector que contiene en cada entrada el número de subintervalos que divide al intervalo global para cada problema, `L2_err_norm` el vector que contiene en cada entrada el error en la norma L^2, `L2_err_rate` el vector que contiene en cada entrada la tasa de convergencia de la norma L^2, y así similarmente para los vectores `H1_err_norm` y `H1_err_rate`.

1. Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), \tag{1a}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{1b}$$

donde $f(x) = (4\pi)^2 \sin(4\pi x)$. Observar que $u(x) = \sin(4\pi x)$ es la solución del problema (1). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(D)$ y $H^1(D)$ para $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$ donde N es el número de subintervalos que dividen a D.

2. Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u = f(x) \qquad \text{en} \quad D := (0,1), \tag{2a}$$

$$u(0) = 1, \frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = 0, \tag{2b}$$

*daniel.castanon@iimas.unam.mx

donde $f(x) = -2e^x + 2(1-x)e^x + (1-x)^2 e^x$. Observar que $u(x) = (1-x)^2 e^x$ es la solución del problema (2). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(D)$ y $H^1(D)$ para $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$ donde N es el número de subintervalos que dividen a D.

3. Obtener el interpolador $v_I(x)$ de la función $v(x) = \cos(4\pi x)$ para el intervalo $D := (0,1)$ utilizando los elementos finitos de Lagrange de **segundo orden**. Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := v_I - v$ en las normas $L^2(D)$ y $H^1(D)$ para $N \in \{10, 20, 40, 80, 160\}$ donde N es el número de subintervalos que dividen a D.

2 Problemas Teóricos

1. Sea $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave y su interpolador $v_I(x)$ en el intervalo $D := (0,1)$ utilizando los elementos finitos de Lagrange de **primer orden**. Demostrar que

$$\|v - v_I\|_{L^2(D)} \leq Ch^2 \|v''\|_{L^2(D)},$$

donde C es una constante y $h = \max_i\{h_i\}$.

2. Demostrar directamente la siguiente desigualdad de Sobolev para $D := (0,1) \subset \mathbb{R}$:

$$\|v\|_{L^\infty(D)} \leq C\|v'\|_{L^2(D)^d} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(D).$$

3. Sea $p \in [1, \infty)$ y $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \cdots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$, donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Demostrar directamente la desigualdad de Poincaré:

$$\|v\|_{L^2(D)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(D)^d} \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

utilizando la definición $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ (en la norma $W^{1,p}(D)$) y el teorema fundamental del cálculo.

4. Sea $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida a continuación

$$v(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ c_0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Demostrar que $v(x)$ no tiene derivada débil. (Sugerencia: Demuéstrese por contradicción).
