Teoría, Práctica y Aplicaciones de los Elementos Finitos
Tarea II

Daniel Castañón Quiroz*[1]

[1]Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

April 11, 2023

1 Problemas en Matlab

1.1 Instrucciones

Todo los problemas se deberán entregar en archivos diferentes con extensión `.m`. Por ejemplo el problema 1 deberá estar estar en el archivo `Problema_1.m`, etc. Dentro de cada archivo se deberá poner el nombre del estudiante y su correo eléctronico. Utiliza commentarios cuando sea necesario. Todos los programas deberán correr y tener solamente el output que se específica utilizando el comando `disp`. Para todo los problemas, el único output del programa deber ser una tabla de la forma:

```
[h_vec' L2_err_norm' L2_err_rate' H1_err_norm' H1_err_rate']
```

donde `h_vec` es el vector que contiene en cada entrada el h de la malla para cada problema, `L2_err_norm` el vector que contiene en cada entrada el error en la norma L^2, `L2_err_rate` el vector que contiene en cada entrada la tasa de convergencia de la norma L^2, y así similarmente para los vectores `H1_err_norm` y `H1_err_rate`.

1. Obtener el interpolador $v_I(\boldsymbol{x})$ de la función $v(\boldsymbol{x}) = \cos(4\pi x_1)\cos^2(4\pi x_2)$ para el dominio $\Omega := (0,1)\times(0,1)$ utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden**. Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := v_I - v$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.

2. Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\nabla\cdot(k(\boldsymbol{x})\nabla u) = f(\boldsymbol{x}) \quad \text{en} \quad \Omega := (0,1)\times(0,1), \tag{1a}$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \tag{1b}$$

donde

$$f(\boldsymbol{x}) = 8\pi\sin(4\pi x_2)\left(4\pi x_1^2\sin(4\pi x_1) + 4\pi\sin(4\pi x_1) - x_1\cos(4\pi x_1)\right),$$

y $k(\boldsymbol{x}) = 1 + x_1^2$. Verificar que $u(\boldsymbol{x}) = \sin(4\pi x_1)\sin(4\pi x_2)$ es la solución del problema (1). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.

*daniel.castanon@iimas.unam.mx

3. Obtener el interpolador $v_I(\boldsymbol{x})$ de la función $v(\boldsymbol{x}) = \cos(4\pi x_1)\cos^2(4\pi x_2)$ para el dominio $\Omega := (0,1) \times (0,1)$ utilizando los elementos finitos de **Crouzeix–Raviart de primer orden**. Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := v_I - v$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.