Teoría, Práctica y Aplicaciones de los Elementos Finitos
Proyecto (Práctico) Final

Daniel Castañón Quiroz*[1]

[1]Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

May 16, 2023

1 Problemas en Matlab

1.1 Instrucciones

Todo los problemas se deberán entregar en archivos diferentes con extensión `.m`. Por ejemplo el problema 1 deberá estar estar en el archivo `Problema_1.m`, etc. Dentro de cada archivo se deberá poner el nombre del estudiante y su correo eléctronico. Utiliza comentarios cuando sea necesario. Todos los programas deberán correr y tener solamente el output que se específica utilizando el comando `disp`. Por ejemplo si se piden tablas de convergencia, el output del programa deber ser una tabla de la forma:

```
[h_vec' L2_err_norm' L2_err_rate' H1_err_norm' H1_err_rate']
```

donde `h_vec` es el vector que contiene en cada entrada el h de la malla para cada problema, `L2_err_norm` el vector que contiene en cada entrada el error en la norma L^2, `L2_err_rate` el vector que contiene en cada entrada la tasa de convergencia de la norma L^2, y así similarmente para los vectores `H1_err_norm` y `H1_err_rate`.

Resolver los problemas que sean necesarios para obtener **un mínimo de 3 puntos en total**.

1. (1 punto) Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de segundo orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (k(\boldsymbol{x})\nabla u) &= f(\boldsymbol{x}) \quad \text{en} \quad \Omega := (0,1)\times(0,1), && \text{(1a)} \\ u &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega, && \text{(1b)} \end{aligned}$$

   donde
$$f(\boldsymbol{x}) = 8\pi \sin(4\pi x_2)\left(4\pi x_1^2 \sin(4\pi x_1) + 4\pi \sin(4\pi x_1) - x_1 \cos(4\pi x_1)\right),$$

   y $k(\boldsymbol{x}) = 1 + x_1^2$. Verificar que $u(\boldsymbol{x}) = \sin(4\pi x_1)\sin(4\pi x_2)$ es la solución del problema (3). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.

2. (1 punto) Resolver el problema 1. utilizando los elementos finitos de **Crouzeix–Raviart de primer orden**.

*daniel.castanon@iimas.unam.mx

3. (1 punto) Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden** la solución débil del problema estacionario de *Allen-Chan* con valores en la frontera:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + u^3 - u &= f(\boldsymbol{x}) \quad \text{en} \quad \Omega := (0,1)\times(0,1), && \text{(2a)}\\
u &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega. && \text{(2b)}
\end{aligned}
$$

Usando $u(\boldsymbol{x}) = \sin(4\pi x_1)\sin(4\pi x_2)$ como solución, entonces calcular $f(\boldsymbol{x})$ utilizando (2a). Observar que el problema (2) es una EDP no lineal, por lo tanto se tendrá que resolver un sistema no-lineal discreto, para ello entonces utilizar el algoritmo de Newton (ver libro de Burden-Faires sección 10.2). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.

4. (2 puntos) Aproximar numéricamente la solución débil del problema de Stokes con valores en la frontera:

$$
\begin{aligned}
-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{en} \quad \Omega := (0,1)\times(0,1), && \text{(3a)}\\
\nabla \cdot u &= 0 \quad \text{en} \quad \Omega, && \text{(3b)}\\
u &= \boldsymbol{g} \quad \text{en} \quad \partial\Omega, && \text{(3c)}
\end{aligned}
$$

utilizando el par estable Taylor–Hood $\mathbb{P}^2/\mathbb{P}^1$.

   (a) Para $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \left[\sin^2(\pi x_1)\sin(2\pi x_2), -\sin(2\pi x_1)\sin^2(\pi x_2)\right]^t$ y $p(x_1, x_2) = x_2\cos(\pi x_1)$, verificar que $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ y calcular $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{g}$. Obtener entonces la tasas de convergencia para el error $\boldsymbol{e}_u := \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, la tasa de convergencia de $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_h$ en la norma $L^2(\Omega)$, y la tasa de convergencia para el error $e_p := p_h - p$ en la norma $L^2_0(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso. Recordar que se demostró en clase que la tasas de convergencia para $\boldsymbol{e}_u$ en la norma H^1 es 2, y para la norma L^2 es 3. La tasa de convergencia para $\boldsymbol{e}_p$ en la norma L^2_0 es 2.

5. (2 puntos) Resolver el problema 4 utilizando el par estable Crouzeix–Raviart $\mathbb{P}^1/\mathbb{P}^0$. Para el inciso (a) es posible demostrar que la tasas de convergencia para $\boldsymbol{e}_u$ en la norma H^1 es 1, y para la norma L^2 es 2. La tasa de convergencia para $\boldsymbol{e}_p$ en la norma L^2_0 es 1.