

Teoría, Práctica y Aplicaciones de los Elementos Finitos

Tarea I

Daniel Castañón Quiroz*¹

¹Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

March 18, 2026

1 Problemas en Matlab

1.1 Instrucciones

Todo los problemas se deberán entregar en archivos diferentes con extensión .m. Por ejemplo el problema 1 deberá estar en el archivo Problema_1.m, etc. Dentro de cada archivo se deberá poner el nombre del estudiante y su correo electrónico. Utiliza comentarios cuando sea necesario. Todos los programas deberán correr y tener solamente el output que se especifica utilizando el comando disp. Para todo los problemas, el único output del programa deber ser una tabla de la forma:

```
[h_vec' L2_err_norm' L2_err_rate' H1_err_norm' H1_err_rate']
```

donde h_vec es el vector que contiene en cada entrada el h de la malla para cada problema, L2_err_norm el vector que contiene en cada entrada el error en la norma L^2 , L2_err_rate el vector que contiene en cada entrada la tasa de convergencia de la norma L^2 , y así similarmente para los vectores H1_err_norm y H1_err_rate.

1. Obtener el interpolador $v_I(\mathbf{x})$ de la función $v(\mathbf{x}) = \cos(4\pi x_1) \cos^2(4\pi x_2)$ para el dominio $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$ utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden**. Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := v_I - v$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.
2. Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}) \quad \text{en} \quad \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (1a)$$

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega, \quad (1b)$$

Calcular $f(\mathbf{x})$ para $u(\mathbf{x}) = \sin(4\pi x_1) \sin(4\pi x_2)$. Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.

*daniel.castanon@iimas.unam.mx

3. Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\nabla \cdot (k(\mathbf{x}) \nabla u) = f(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (2a)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (2b)$$

donde

$$f(\mathbf{x}) = 8\pi \sin(4\pi x_2) \left(4\pi x_1^2 \sin(4\pi x_1) + 4\pi \sin(4\pi x_1) - x_1 \cos(4\pi x_1) \right),$$

y $k(\mathbf{x}) = 1 + x_1^2$. Verificar que $u(\mathbf{x}) = \sin(4\pi x_1) \sin(4\pi x_2)$ es la solución del problema (2). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error $e := u_h - u$ en las normas $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ para la familia de mallas proporcionada en la página del curso. En este problema es **obligatorio** utilizar **integración numérica** para la matriz de difusión por cambio de coordenadas al simplejo de referencia.

2 Problemas Teóricos

***Importante:** Las respuestas se deben entregar escritas a mano.

1. Demostrar directamente la siguiente desigualdad de Sobolev para $D := (0, 1) \subset \mathbb{R}$:

$$\|v\|_{L^\infty(D)} \leq C \|v'\|_{L^2(D)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(D).$$

2. Sea $p \in [1, \infty)$ y $\Omega = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \cdots \times (a_d, b_d) \subset \mathbb{R}^d$, donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Demostrar directamente la desigualdad de Poincaré:

$$\|v\|_{L^2(D)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(D)} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

utilizando la definición $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ (en la norma $W^{1,p}(D)$) y el teorema fundamental del cálculo.

3. Sea $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida a continuación

$$v(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ c_0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Demostrar que $v(x)$ no tiene derivada débil. (Sugerencia: Demuéstrese por contradicción).