

# Teoría, Práctica y Aplicaciones de los Elementos Finitos

## Tarea Final

Daniel Castañón Quiroz\*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Cd. de México, México

May 19, 2026

### 1 Problemas en Matlab

#### 1.1 Instrucciones

Todo los problemas se deberán entregar en archivos diferentes con extensión `.m`. Por ejemplo el problema 1 deberá estar en el archivo `Problema_1.m`, etc. Dentro de cada archivo se deberá poner el nombre del estudiante y su correo electrónico. Utiliza comentarios cuando sea necesario. Todos los programas deberán correr y tener solamente el output que se especifica utilizando el comando `disp`. Por ejemplo si se piden tablas de convergencia, el output del programa deber ser una tabla de la forma:

```
[h_vec' L2_err_norm' L2_err_rate' H1_err_norm' H1_err_rate']
```

donde `h_vec` es el vector que contiene en cada entrada el  $h$  de la malla para cada problema, `L2_err_norm` el vector que contiene en cada entrada el error en la norma  $L^2$ , `L2_err_rate` el vector que contiene en cada entrada la tasa de convergencia de la norma  $L^2$ , y así similarmente para los vectores `H1_err_norm` y `H1_err_rate`.

**Resolver los problemas que sean necesarios para obtener un mínimo de 5 puntos en total.**

- (2 puntos) Obtener el interpolador  $v_I(\mathbf{x})$  de la función  $v(\mathbf{x}) = \cos(4\pi x_1) \cos^2(4\pi x_2)$  para el dominio  $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$  utilizando los elementos finitos de **Crouzeix–Raviart**. Obtener entonces la tasa de convergencia para el error  $e := v_I - v$  en las normas  $L^2(\Omega)$  y  $H^1(\mathcal{T}_h)$  para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.
- (3 puntos) Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de segundo orden** la solución débil del siguiente problema con valores en la frontera:

$$-\nabla \cdot (k(\mathbf{x})\nabla u) = f(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (1a)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \quad (1b)$$

donde

$$f(\mathbf{x}) = 8\pi \sin(4\pi x_2) \left( 4\pi x_1^2 \sin(4\pi x_1) + 4\pi \sin(4\pi x_1) - x_1 \cos(4\pi x_1) \right),$$

y  $k(\mathbf{x}) = 1 + x_1^2$ . Verificar que  $u(\mathbf{x}) = \sin(4\pi x_1) \sin(4\pi x_2)$  es la solución del problema (1). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error  $e := u_h - u$  en las normas  $L^2(\Omega)$  y  $H^1(\Omega)$  para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.

---

\*[daniel.castanon@iimas.unam.mx](mailto:daniel.castanon@iimas.unam.mx)

3. (3 puntos) Resolver el problema 1. utilizando los elementos finitos de **Crouzeix–Raviart de primer orden**.
4. (3 puntos) Aproximar numéricamente utilizando los elementos finitos de **Lagrange de primer orden** la solución débil del problema estacionario de *Allen-Chan* con valores en la frontera:

$$-\Delta u + u^3 - u = f(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (2a)$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (2b)$$

Usando  $u(\mathbf{x}) = \sin(4\pi x_1) \sin(4\pi x_2)$  como solución, entonces calcular  $f(\mathbf{x})$  utilizando (3a). Observar que el problema (2) es una EDP no lineal, por lo tanto se tendrá que resolver un sistema no-lineal discreto, para ello entonces utilizar el algoritmo de Newton (ver libro de Burden-Faires sección 10.2). Obtener entonces la tasa de convergencia para el error  $e := u_h - u$  en las normas  $L^2(\Omega)$  y  $H^1(\Omega)$  para la familia de mallas proporcionada en la página del curso.

5. (2 puntos) Este problema no es un problema de convergencia. Dado tres vértices  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^3$  de un triángulo  $K$  como input, obtener la base nodal del E.F. de **Raviart–Thomas** de orden 0, i.e.,  $\mathbf{RT}^0(K)$ . Para ello es **obligatorio** usar la transformación de *Piola* (ver problema 1 en la sección de Problemas Teóricos). Esto es, el output del programa debe dar los coeficientes de la base nodal. Asimismo, se debe verificar en el programa que efectivamente se esta dando una base nodal. (Este programa puede venir acompañado de un PDF que muestre los cálculos necesarios hechos a mano).

## 2 Problemas Teóricos

**\*Importante:** Las respuestas se deben entregar escritas a mano. [Resolver los problemas que sean necesarios para obtener un mínimo de 5 puntos en total.](#)

1. (2 puntos) Sea una función vectorial  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(K)$ , y  $T_K$  la transformación de  $\hat{K} \rightarrow K$  donde  $K$  es un simplejo arbitrario y  $\hat{K}$  el de referencia. Demostrar que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = \det(J_{T_K})^{-1} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot (\det(J_{T_K}) J_{T_K}^{-1} (\mathbf{v} \circ \mathbf{T}_K)(\hat{\mathbf{x}})).$$

A la transformación  $\mathbf{V}(K) \ni \mathbf{v} \rightarrow \det(J_{T_K}) J_{T_K}^{-1} (\mathbf{v} \circ \mathbf{T}_K)(\hat{\mathbf{x}}) =: \psi(\mathbf{v})$  se le conoce como la *transformación de Piola*. Observar que

$$\int_K \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = \int_{\hat{K}} \nabla_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \psi(\mathbf{v}).$$

2. (2 puntos) En el framework del método de Discontinuous Galerkin (DG) visto en clase. Considere los flujos numéricos del método NIPG para  $K \in \mathcal{T}_h$  y una cara  $F \in \mathcal{F}_K$ :

$$\phi_u(u_h, K, F) = \begin{cases} \{u_h\} + \mathbf{n}_{FK} \cdot \llbracket u_h \rrbracket, & \text{on } \mathcal{F}_h^i, \\ 0, & \text{on } \mathcal{F}_h^\partial, \end{cases},$$

$$\text{y } \phi_\sigma(u_h, \sigma_h) = \{\nabla_h u_h\} - \gamma_F h_F^{-1} \llbracket u_h \rrbracket \text{ on } \mathcal{F}_h,$$

donde  $\gamma_F$  es un parámetro. Demostrar que la forma bilineal  $a_h(\cdot, \cdot)$  esta dada por:

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v) &= \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v + \int_{\mathcal{F}_h} \gamma_F h_F^{-1} \llbracket u_h \rrbracket \llbracket v \rrbracket \\ &\quad + \int_{\mathcal{F}_h} \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\nabla_h v\} - \int_{\mathcal{F}_h} \{\nabla_h u_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket. \end{aligned}$$

3. (2 puntos) Considere el siguiente problema de Poisson:

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega := (0, 1) \times (0, 1), \quad (3a)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} = g(\mathbf{x}) \quad \text{en } \partial\Omega. \quad (3b)$$

Donde la función  $g$  es suficientemente suave.

- (a) Obtener la formulación débil mixta en los espacios de Hilbert  $X$  y  $M$  los cuales son subespacios *pertinentes* de  $\mathbf{Hdiv}(\Omega)$  y  $L^2(\Omega)$ .
- (b) Demostrar que la formulación débil del inciso anterior está un bien planteado (*Sugerencia:* Usar el lema B.69 de Ern & Guermond).
- (c) Sea  $X_h \subset X$  y  $M_h \subset M$  espacios discretos conformes. Obtener la formulación débil y demostrar que está bien planteado.
- (d) Obtener las estimaciones de error entre las soluciones del problema mixto abstracto y de su discretización.

4. (3 puntos) Considere el problema débil: Encontrar  $(\sigma, u, \lambda) \in X \times Y \times M$  tales que:

$$a(\sigma, \tau) + b(\tau, u) = \langle f, \tau \rangle \quad \tau \in X,$$

$$b(\sigma, v) + c(v, \lambda) = \langle g, v \rangle \quad v \in Y,$$

$$c(u, \mu) = 0 \quad \mu \in M,$$

donde los espacios  $X, Y$  y  $M$  son espacios de Hilbert, y las formas  $a, b$  y  $c$  son formas bilineales acotadas en los espacios correspondientes. Transformar el problema mixto ‘triple’ de arriba en un problema estándar mixto. ¿Cuáles son las condiciones para que el problema de arriba tenga solución? (*Sugerencia:* Utilizar el teorema BNB y el teorema de Brezzi)